

26.12.23 математика 13эл

Тема: « Основные тригонометрические тождества »

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \sin \alpha \neq 0, \quad \cos \alpha \neq 0$$

Задача 1 Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (1)$$

► По определению $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, и поэтому

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Задача 2 Доказать тождество

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha).$$

► $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \quad \triangleleft$

Задача 3 Доказать тождество $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

► Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = 0. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Задача 4 Доказать тождество $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. \triangleleft

Задача 5 Упростить выражение $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha. \triangleleft$$

Выполнить по образцу:

Упражнения

465 Доказать тождество:

1) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$;

2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

5) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1$;

6) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1$.

466 Упростить выражение:

1) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha$;

2) $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$;

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

